Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Études mathématiques
Niveau moyen
Épreuve 1

Mardi 10 mai 2016 (après-midi)

1 heure 30 minutes

Numéro de session du candidat

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours d’études mathématiques NM** est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions.
- Rédigez vos réponses dans les espaces prévus à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[90 points]**.

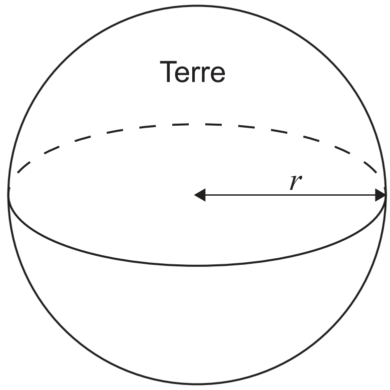
2216 – 7407

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

Le total des points sera attribué pour une réponse correcte. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse.

1. Supposez que la Terre est une sphère dont le rayon, r, mesure $6{,}38 \times 10^3\,\mathrm{km}$.



(a) (i) Calculez l'aire de la surface de la Terre en km^2.

(ii) Écrivez votre réponse de la partie (a)(i) sous la forme $a \times 10^k$, où $1 \le a < 10$ et $k \in \mathbb{Z}$. [4]

La partie de l'aire de la surface de la Terre qui est couverte d'eau est d'environ $3{,}61 \times 10^8\,\mathrm{km}^2$.

(b) Calculez le pourcentage de l'aire de la surface de la Terre qui est couverte d'eau. [2]

Résolution :

Réponses :

(a) (i) . . . .

(ii) . . . .

(b) . . . .

Tournez la page

2. Considérez les nombres -1 ; 4 ; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$; $0{,}35$ et -2^2.

Complétez le tableau suivant en cochant (✓) pour indiquer que le nombre est un élément de l'ensemble. La première rangée a été complétée à titre d'exemple.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-1		✓	✓	✓
4				
$\frac{2}{3}$				
$\sqrt{2}$				
$0{,}35$				
-2^2				

[6]

3. Une échelle, reposant sur un sol horizontal, est appuyée contre un mur vertical. La longueur de l'échelle est de $4{,}5$ mètres. La distance entre le bas de l'échelle et la base du mur est de $2{,}2$ mètres.

(a) Utilisez les informations ci-dessus pour esquisser un diagramme légendé qui montre le sol, l'échelle et le mur. [1]

(b) Calculez la distance entre le haut de l'échelle et la base du mur. [2]

(c) Calculez l'angle **obtus** entre l'échelle et le sol. [3]

Résolution :

Réponses :

(b) . . . .

(c) . . . .

4. Considérez les énoncés suivants :

p : Le cours est annulé
q : L'enseignant est absent
r : Les élèves sont à la bibliothèque.

(a) Écrivez, en mots, l'énoncé composé $q \Rightarrow (p \wedge r)$. [3]

(b) Complétez la table de vérité suivante. [2]

q	r	$\neg r$	$q \Rightarrow \neg r$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

(c) **À partir de là**, justifiez pourquoi $q \Rightarrow \neg r$ n'est pas une tautologie. [1]

Résolution :

Réponses :

(a) . . . .

(c) . . . .

5. Deux amis, Sensen et Cruz, mènent une enquête sur les probabilités.

Sensen possède un dé équilibré à six faces, dont les faces sont numérotées 1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 4 et 4. Cruz possède un disque équilibré dont l'une des faces est rouge et l'autre bleue.

Le dé et le disque sont lancés simultanément.

Trouvez la probabilité que

(a) le nombre obtenu sur le dé soit 1 **et** la couleur obtenue sur le disque soit bleue ; [2]

(b) le nombre obtenu sur le dé soit 1 **ou** la couleur obtenue sur le disque soit bleue ; [2]

(c) le nombre obtenu sur le dé soit pair, étant donné que la couleur obtenue sur le disque est rouge. [2]

Résolution :

Réponses :

(a) . . . .

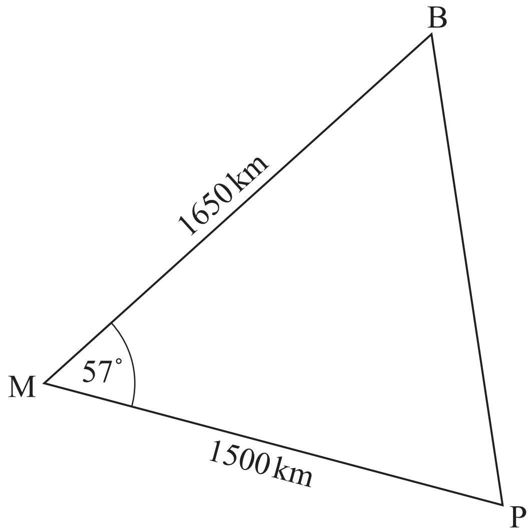
(b) . . . .

(c) . . . .

6. Lorsque les Bermudes (B), Porto Rico (P) et Miami (M) sont reliés sur une carte par des segments de droite, un triangle est formé. Ce triangle est connu sous le nom du triangle des Bermudes.

D'après la carte, la distance MB est de $1650\,\mathrm{km}$, la distance MP est de $1500\,\mathrm{km}$ et l'angle BMP est de 57°.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Calculez la distance entre les Bermudes et Porto Rico, BP. [3]

(b) Calculez l'aire du triangle des Bermudes. [3]

Résolution :

Réponses :

(a) . . . .

(b) . . . .

7. Un sondage a été réalisé auprès d'un échantillon aléatoire de personnes à propos de leur émission de télévision préférée. Les personnes interrogées ont été classées selon leur sexe et leur type d'émission de télévision préférée (Sport, Documentaire, Information et Téléréalité).

Les résultats sont présentés dans le tableau de contingence ci-dessous.

	Sport	**Documentaire**	**Information**	**Téléréalité**	**Total**
Homme	20	24	32	11	87
Femme	18	30	20	25	93
Total	38	54	52	36	180

(a) Trouvez l'effectif théorique de femmes qui préfèrent les documentaires. [2]

Un test du χ^2 au seuil de signification de 5% est utilisé pour déterminer si le type d'émission de télévision préférée est indépendante du sexe.

(b) Écrivez la valeur p pour ce test. [2]

(c) Indiquez la conclusion du test. Donnez une raison qui justifie votre réponse. [2]

Résolution :

Réponses :

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

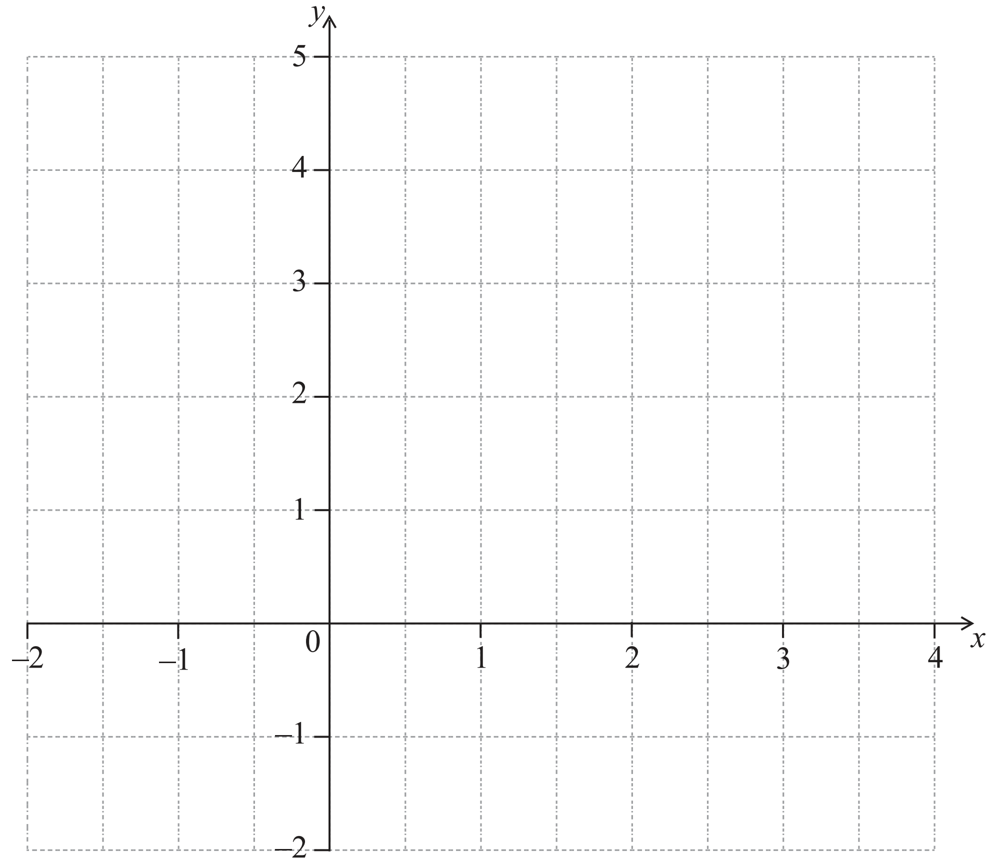
8. Considérez la courbe $y = 1 + \frac{1}{2x}$, $x \neq 0$.

(a) Pour cette courbe, écrivez

(i) la valeur de l'abscisse à l'origine ;

(ii) l'équation de l'asymptote verticale. [3]

(b) Esquissez la courbe pour $-2 \leq x \leq 4$ sur le système d'axes ci-dessous. [3]



(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 8)

Résolution :

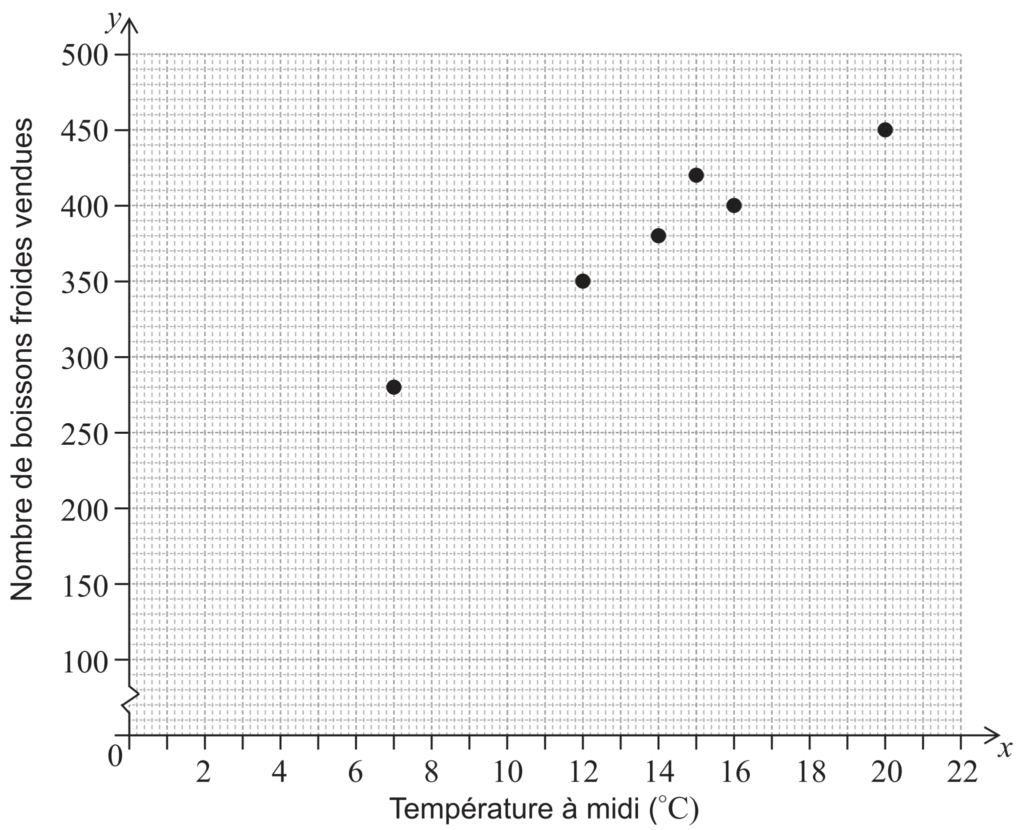
Réponses :

(a) (i) . . . .

(ii) . . . .

9. Chaque jour, un supermarché enregistre la température à midi et le nombre de boissons froides vendues au cours de cette journée. Le tableau suivant présente les données enregistrées par le supermarché au cours des six derniers jours. Ces données sont aussi représentées sur un diagramme de dispersion.

Température à midi en $^{\circ}\mathrm{C}$ (x)	7	12	14	15	16	20
Nombre de boissons froides vendues (y)	280	350	380	420	400	450



(a) Écrivez

(i) la température moyenne, $\bar{x}$;

(ii) le nombre moyen de boissons froides vendues, $\bar{y}$. [2]

(b) Dessinez la droite de régression sur le diagramme de dispersion. [2]

(c) Utilisez la droite de régression pour estimer le nombre de boissons froides vendues lors d'une journée où la température à midi est de $10^{\circ}\mathrm{C}$. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 9)

Résolution :

Réponses :

(a) (i) . . . .

(ii) . . . .

(c) . . . .

10. Obi voyage de Dubaï à Pretoria et change 2000 dirhams des Émirats arabes unis (AED) dans une banque. Il reçoit 6160 rands sud-africains (ZAR).
Le taux de change est $1\ \mathrm{AED} = x\ \mathrm{ZAR}$.

(a) Calculez la valeur de x. [2]

Obi décide d'investir la moitié de l'argent qu'il a reçu, soit $3080\ \mathrm{ZAR}$, dans un compte qui rapporte un taux d'intérêt nominal de 9%, **composé mensuellement**.

Le montant d'argent dans le compte aura doublé avant la fin de la $n$ième année de l'investissement.

(b) Calculez la valeur minimale de n. [4]

Résolution :

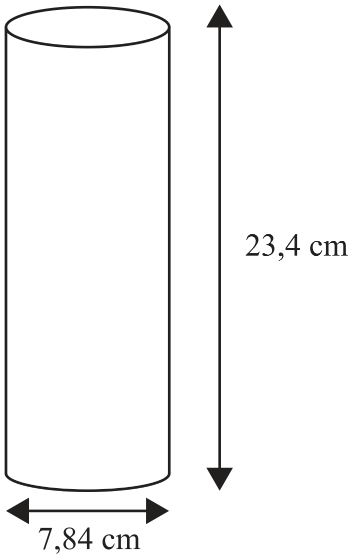
Réponses :

(a) . . . .

(b) . . . .

11. Une boîte en plastique est de forme cylindrique. Le diamètre de la base est de $7,84\,\text{cm}$. La hauteur de la boîte est de $23,4\,\text{cm}$. Cela est représenté dans le diagramme suivant.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Écrivez le rayon, en cm, de la base de la boîte. [1]

(b) Calculez l'aire de la base de la boîte. [2]

Dan a l'intention de peindre la surface courbe et la base de la boîte.

(c) Calculez l'aire à peindre. [3]

Résolution :

Réponses :

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

12. L'équation de la droite L_1 est $y = 2x - 3$.

(a) Écrivez l'ordonnée à l'origine de L_1. [1]

(b) Écrivez la pente de L_1. [1]

La droite L_2 est parallèle à L_1 et passe par le point $(0\,;3)$.

(c) Écrivez l'équation de L_2. [1]

La droite L_3 est perpendiculaire à L_1 et passe par le point $(-2\,;6)$.

(d) Écrivez la pente de L_3. [1]

(e) Trouvez l'équation de L_3. Donnez votre réponse sous la forme $ax + by + d = 0$, où a, b et d sont des entiers relatifs. [2]

Résolution :

Réponses :

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

(d) . . . .

(e) . . . .

13. Une population de moustiques décroît de façon exponentielle. La taille de la population, P, après t jours, est modélisée par

$$P = 3200 \times 2^{-t} + 50 \text{, où } t \geq 0 .$$

(a) Écrivez la taille **exacte** de la population initiale. [1]

(b) Trouvez la taille de la population après 4 jours. [2]

(c) Calculez le temps nécessaire pour que la taille de la population décroît jusqu'à 60. [2]

La population se stabilisera lorsqu'elle atteindra une taille de k.

(d) Écrivez la valeur de k. [1]

Résolution :

Réponses :

(a) . . . .

(b) . . . .

(c) . . . .

(d) . . . .

14. On a demandé à un groupe d'élèves le temps qu'ils consacraient à pratiquer les mathématiques durant la semaine. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Temps, t (heures)	**Nombre d'élèves**
$0 \le t < 1$	35
$1 \le t < 2$	30
$2 \le t < 3$	a
$3 \le t < 4$	52
$4 \le t < 5$	43

On sait que $35 < a < 52$.

(a) Écrivez

(i) la classe modale ;

(ii) la valeur centrale de la classe modale ;

(iii) la classe où se situe la médiane. [3]

Pour ce groupe d'élèves, le nombre moyen estimé d'heures consacrées à pratiquer les mathématiques est de $2{,}69$.

(b) Calculez la valeur de a. [3]

Résolution :

Réponses :

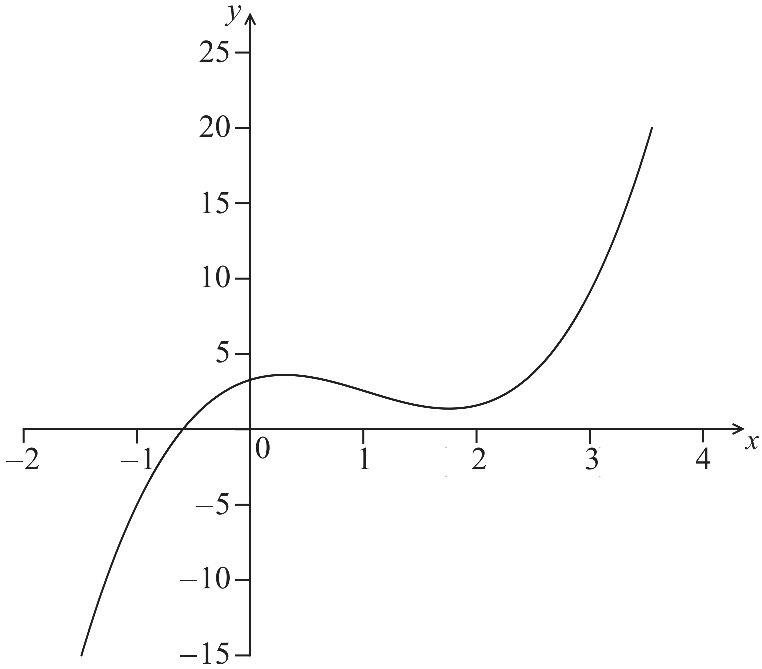
(a) (i) . . . .

(ii) . . . .

(iii) . . . .

(b) . . . .

15. Considérez la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$. Une partie de la représentation graphique de f est représentée ci-dessous.



(a) Trouvez $f'(x)$. [3]

(b) Il existe deux points où la pente de la représentation graphique de f est 11. Trouvez les abscisses de ces points. [3]

Résolution :

Réponses :

(a) . . . .

(b) . . . .

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.